CONCOURS E.N.S.I DE CHIMIE. GROUPE CENTRE
SESSION 1980
PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
(OPTION P', TB)

CORRECTION

---

1. Démontrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute suite $(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ de réels :

$$\triangle^n y_k = \sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_n^j (-1)^{n-j} y_{k+j} \tag{1}$$

Pour $n = 0$, la formule (1) donne : $\triangle^0 y_k = y_k$, ce qui est vérifié, pour $n = 1$, elle donne : $\triangle y_k = -y_k + y_{k+1}$, ce qui est aussi vérifié. Supposons la formule (1) vérifiée pour un entier $n \in \mathbb{N}$ donné. Alors :

$$\begin{aligned}
\triangle^{n+1}(y_k) &= \triangle(\triangle^n y_k) = \triangle\left(\sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_n^j (-1)^{n-j} y_{k+j}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_n^j (-1)^{n-j} y_{k+1+j} - \sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_n^j (-1)^{n-j} y_{k+j} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \mathrm{C}_n^{j-1} (-1)^{n-(j-1)} y_{k+1+(j-1)} - \sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_n^j (-1)^{n-j} y_{k+j} \\
&= y_{k+n+1} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j+1} y_{k+j} - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{C}_n^j (-1)^{n-j} y_{k+j} + (-1)^{n+1} y_k \\
&= y_{n+1+k} + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{C}_{n+1}^j (-1)^{n+1-j} y_{k+j} + (-1)^{n+1} y_k \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \mathrm{C}_{n+1}^j (-1)^{n+1-j} y_{k+j}.
\end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \mathrm{C}_n^j (-1)^{n-j} y_{k+j}$.

2. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(X^k(1-X)^{n-k}) = n$, ainsi, chaque terme de la somme est de degré inférieure ou égal à n. Donc $B_n(f, x)$ est de degré au plus n.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, posons : $y_k = f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. D'après (1), on a donc :

$$\forall t \in [\![0, n]\!],\ \ \triangle^t(y_0) = \sum_{j=0}^{t} \mathrm{C}_t^j (-1)^{t-j} y_j = \sum_{j=0}^{t} \mathrm{C}_t^j (-1)^{t-j} f\left(\frac{j}{n}\right).$$

Or

$$\mathrm{C}_n^t \mathrm{C}_t^k = \frac{n!}{t!(n-t)!}\frac{t!}{k!(t-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(t-k)!(n-t)!} = \mathrm{C}_k^n \mathrm{C}_{n-k}^{t-k}.$$

donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{t=0}^{n} \triangle^t f(0)\mathtt{C}_n^t x^t &= \sum_{t=0}^{n}\left(\sum_{k=0}^{t}\mathtt{C}_t^k(-1)^{t-k} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\mathtt{C}_n^t x^t \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{t=k}^{n}\mathtt{C}_{n-k}^{t-k}(-1)^t x^k\right)\mathtt{C}_n^k(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n-k}\mathtt{C}_{n-k}^{p}(-1)^{p+k} x^{p+k}\right)\mathtt{C}_k^n(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{n-k}\mathtt{C}_{n-k}^{p}(-x)^{p} 1^{(n-k)-p}\right)\mathtt{C}_k^n x^k f\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}(1-x)^{n-k}\mathtt{C}_k^n x^k f\left(\frac{k}{n}\right).
\end{aligned}$$

D'où $\forall x \in [0,1],\ \sum_{t=0}^{n} \triangle^t f(0)\mathtt{C}_n^t x^t = B_n(f,x)$.

3. (a) Si $f : x \mapsto 1$, alors on a $B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n}\mathtt{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} = (x+1-x)^n = 1$.

(b) Si $f : x \mapsto x$, on trouve $B_n(f,x) = x$.

(c) Si $f : x \mapsto x^2$, on trouve $B_n(f,x) = \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n}x^2$.

4. Dans les deux cas précédents, les suites $(B_n(f,x))_{n\in\mathbb{N}}$ étant constantes, elles convergent uniformément vers f sur $[0,1]$.
Dans le dernier cas, on a :

$$\forall x \in [0,1],\ \ |B_n(f,x) - f(x)| = \left|\frac{x-x^2}{n}\right|$$

et puisque le minimum de la fonction : $x \mapsto x - x^2$ sur $[0,1]$ est $\frac{1}{4}$, on a :

$$\sup_{x\in[0,1]} |B_n(f,x) - f(x)| = \frac{1}{4n}$$

ce qui signifie que la suite $(B_n(f,x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

5. Pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\mathtt{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}(k^2 - 2knx + n^2x^2)\mathtt{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} \\
&= n^2B_n(x^2,x) - 2n^2xB_n(x,x) + n^2x^2B_n(1,x) \\
&= n^2\left(\frac{x+(n-1)x^2}{n}\right) - 2n^2x.x + n^2x^2.1 \\
&= nx(1-x).
\end{aligned}$$

D'où

$$\forall x \in [0,1],\ \sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\mathtt{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x).$$

Soit $\delta > 0$. Alors :

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta \Leftrightarrow |k - nx| \geq \delta n \Leftrightarrow (k-nx)^2 \geq \delta^2 n^2$$

donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta} \mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta} \frac{(k-nx)^2}{(k-nx)^2}\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} && (2)\\
&\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta} \frac{(k-nx)^2}{\delta^2 n^2}\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} && (3)\\
&\leq \frac{1}{\delta^2 n^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} && (4)\\
&\leq \frac{1}{\delta^2 n^2} nx(1-nx) && (5)
\end{aligned}$$

et, en majorant encore $x \mapsto x - x^2$ sur $[0,1]$ par $\dfrac{1}{4}$, on obtient :

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta} \mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4\delta^2 n}$$

6. Soit $\varepsilon > 0$. Alors, f étant continue sur le segment $[0,1]$, elle y est uniformément continue. Donc :

$$\exists\delta > 0,\ \ \forall x, y \in [0,1],\ \ |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Donc, si $\left|\dfrac{k}{n} - x\right| < \delta$, alors $\left|f\left(\dfrac{k}{n}\right) - f(x)\right| < \varepsilon$ ou encore

$$f(x) - \varepsilon < f\left(\frac{k}{n}\right) < f(x) + \varepsilon$$

Maintenant, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
|B_n(f,x) - f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k} - f(x)\right|\\
&= \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta}^{n} \mathrm{C}_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}^{n} \mathrm{C}_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k} - f(x)\right|\\
&\leq \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\delta}^{n} \mathrm{C}_n^k \|f\|_\infty x^k(1-x)^{n-k} + \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}^{n} \mathrm{C}_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k} - f(x)\right|\\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{4\delta^2 n} + \left|\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}^{n} \mathrm{C}_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k} - f(x)\right|
\end{aligned}$$

Or, dans cette dernière somme, on a bien $\left|\dfrac{k}{n} - x\right| < \delta$, donc $f\left(\dfrac{k}{n}\right) < f(x) + \varepsilon$, et ainsi :

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}^{n} \mathrm{C}_n^k f\left(\frac{l}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k} \leq \left(\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<\delta}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right)(f(x)+\varepsilon) \leq f(x) + \varepsilon.$$

ce qui permet de majorer cette dernière somme par ε. Ainsi, à partir d'un certain rang n_0 tel que $\dfrac{\|f\|_\infty}{4\delta^2 n} < \varepsilon$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geq n_0 \Rightarrow |B_n(f,x) - f(x)| < 2\varepsilon,$$

ce qui signifie que la suite $(B_n(f,x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

• • • • • • • • • • •